c) Désignons par A la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes (C_2) et (C_3)

$\Rightarrow A=\int_1^e[(\text{Log}x)^2-(\text{Log}x)^3]dx=\int_1^e(\text{Log}x)^2dx-\int_1^e(\text{Log}x)^3dx$

$= I_2 - I_3 = I_2 - (e - 3I_2)$ d'après la question précédente

$= 4I_2 - e = 4(e-2) - e = 3e - 8.$

4)a) • $\forall x \in [1,e]; \text{Log}x \geq 0$

$\Rightarrow \forall x \in [1,e]; \forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ on a $(\text{Log}x)^n \geq 0$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ on a $\int_1^e(\text{Log}x)^n dx \geq 0$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ on a $I_n \geq 0.$

• $\forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}; I_{n+1} - I_n = \int_1^e(\text{Log}\,x)^{n+1}dx - \int_1^e(\text{Log}x)^n dx$

$= \int_1^e(\text{Log}x)^n[\text{Log}x - 1]dx$

Comme $\forall x \in [1,e]; \text{Log}x \geq 0$ et $\text{Log}x - 1 \leq 0$ alors

$\forall x \in [1,e]; \forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}; (\text{Log}x)^n[\text{Log}x - 1] \leq 0$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}; I_{n+1} - I_n = \int_1^e(\text{Log}x)^n[\text{Log}x - 1]dx \leq 0$

Par suite (I_n) est décroissante.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$.

• $I_{n+1} \leq I_n$ car (I_n) est décroissante.

$\Leftrightarrow \underbrace{I_{n+1} + (n+1)I_n} \leq I_n + (n+1)I_n$

$\Leftrightarrow \quad e \quad \leq (n+2)I_n \Leftrightarrow \frac{e}{n+2} \leq I_n \qquad (1).$

• $\forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1;2\}; \quad I_n \leq I_{n-1}$ car (I_n) est décroissante.

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1;2\}; \quad nI_n \leq nI_{n-1}$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1;2\}; \quad I_n + nI_n \leq I_{(n-1)+1} + ((n-1)+1)I_{n-1} = e$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1;2\}; \quad I_n \leq \frac{e}{n+1} \qquad (2)$

Ainsi (1) et (2) donnent $\forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}; \frac{e}{n+2} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}; \frac{e}{n+2} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}; \frac{ne}{n+2} \leq nI_n \leq \frac{ne}{n+1}$

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{ne}{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\not{n}e}{\not{n}(1+2/n)} = e$ aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{ne}{n+1} = e$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = e.$

EXERCICE 2

1)a) Soit α un réel.

$i\alpha$ est une solution imaginaire pure de (E)

$\Leftrightarrow (i\alpha)^3 + 2(1-i)(i\alpha)^2 + (1+m^2-4i)(i\alpha) - 2i(1+m^2) = 0$

$\Leftrightarrow -i\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2i\alpha^2 + (1+m^2)(i\alpha) + 4\alpha - 2i(1+m^2) = 0$

$\Leftrightarrow [-2\alpha^2 + 4\alpha] + i[-\alpha^3 + 2\alpha^2(1+m^2)\alpha - 2(1+m^2)] = 0$